

Kvasimaailman alku

Komeetan muodosta kvasisymmetrioihin

Sylvester Eriksson-Bique

Apulaisprofessori, Matemaatikko

Jyväskylän Yliopisto

EMIL AALTOSEN SÄÄTIÖ

Karttojen piirtäminen



Komeetta 67P

Churyumov-Gerasimenko

Kysymys:

Minkälainen kartta
komeetalle
voidaan piirtää?

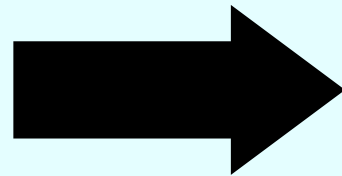
Alku?

Euklidinen
geometria



Euclid

[Jusepe de Ribera - Euclid -
2001.26 - J. Paul Getty]

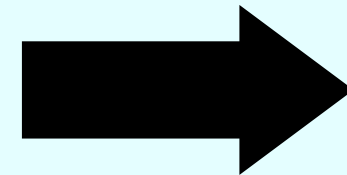


Kaarevuus ja
pintojen
isometrisyys

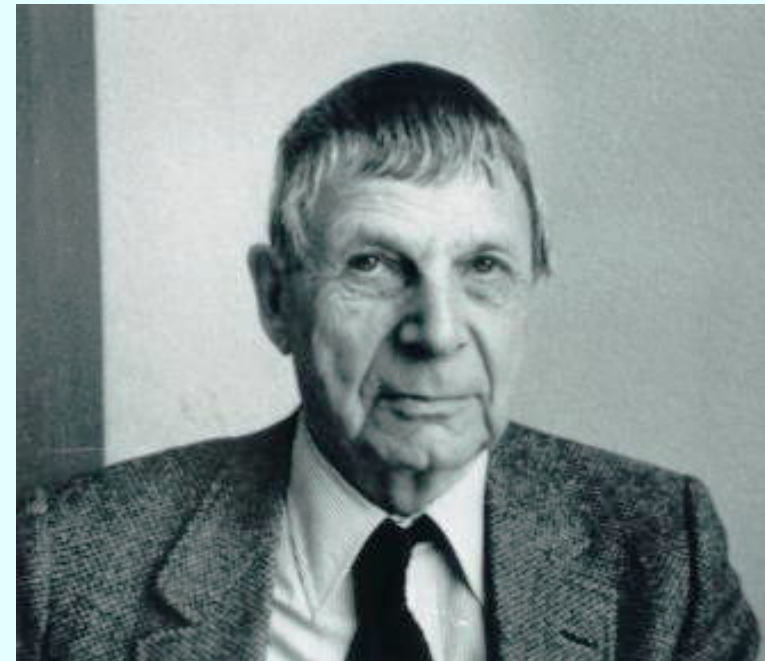


C.F. Gauss

[Nicku/Shutterstock.com]

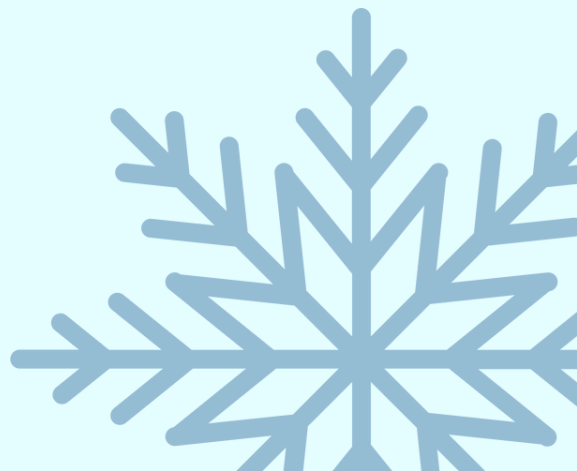


Konformit
kuvaukset



L. Ahlfors

[Konrad Jacobs, Erlangen]



Alku-- Monia alkujia!

Karttaprojektiot



Gerard Mercator
[Workshop of Titian -
Gerard Mercator]

Sähkömagnetismi



J.C. Maxwell
[Frontpiece in James
Maxwell, The Scientific
Papers of James Clerk
Maxwell.]

Matematiikassa ja
tieteessä

sama idea ja ajatus usein
syntyy

monissa paikoissa ja
konteksteissa.

Karttojen piirtäminen



Imago Mundi

Babylonialainen kartta

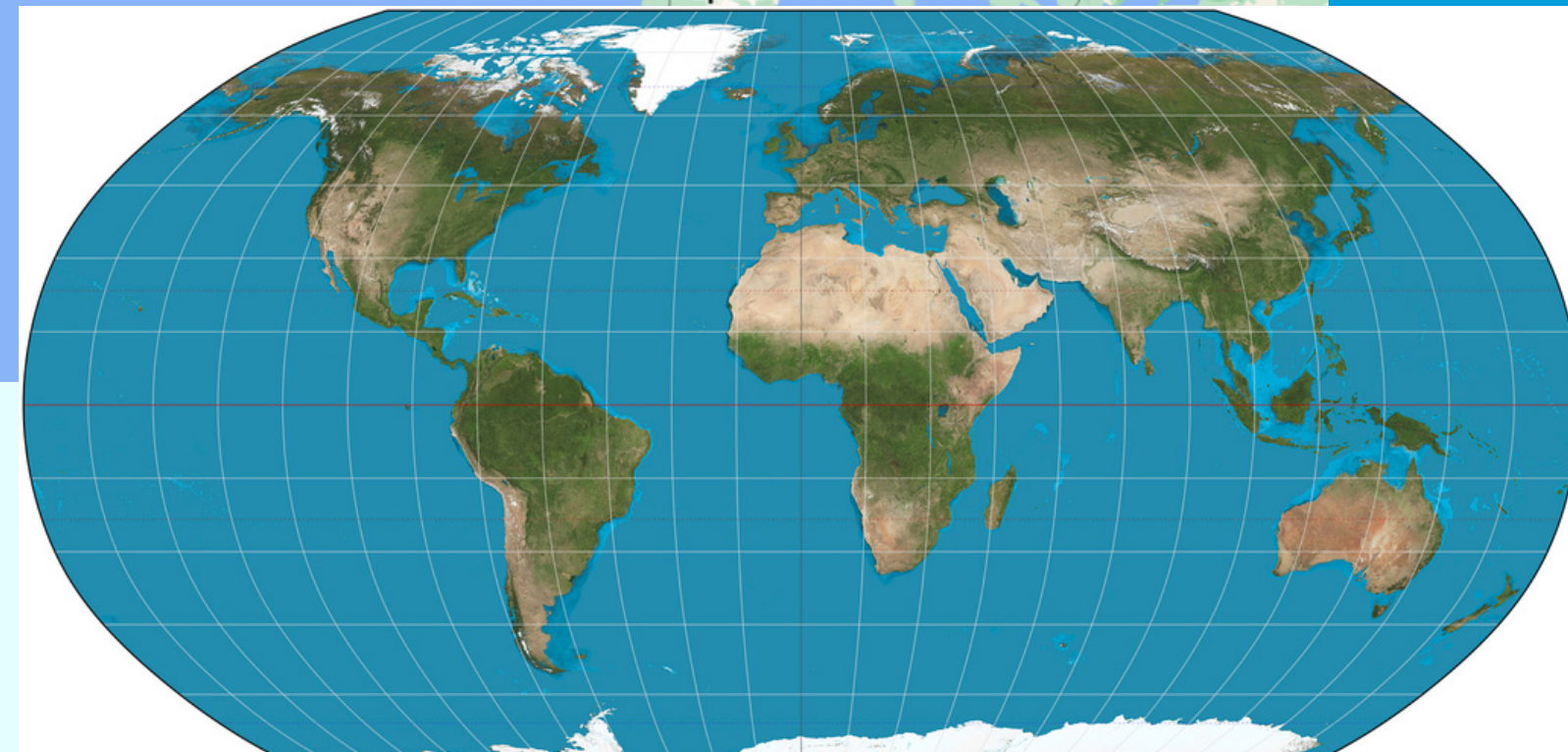
n. 9. vuosisata BCE

Karttojen piirtäminen



Mercator Nova et Aucta
Orbis Terrae Descriptio,
1569

Karttojen piirtäminen



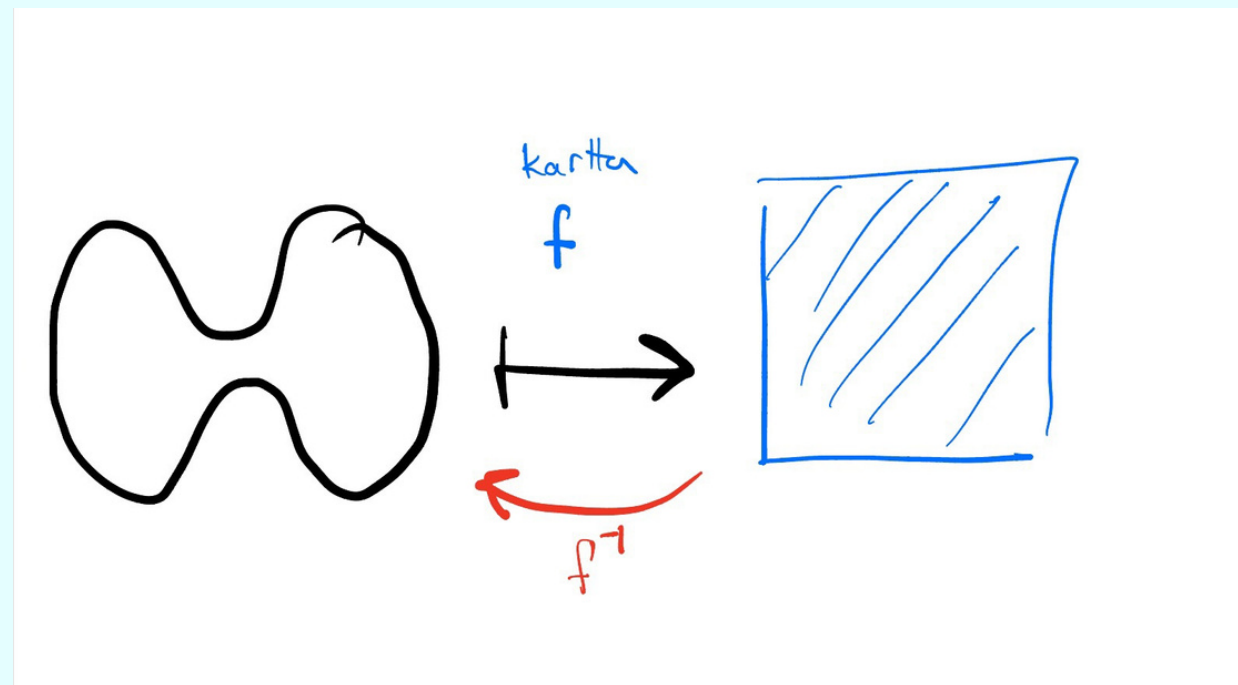
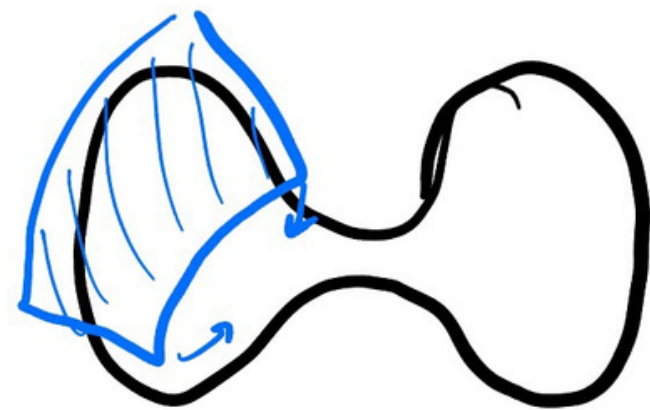
Ei ole vain yhtä karttaa

ja

kaikissa kartoissa on
"vikansa".

Monia kartta projektioita.

Mikä on kartta?



Kaksi tapaa ajatella:

Paperin asettelu pinnalle.

Kuvaus pinnalta paperille.

Miksi vaikeaa?



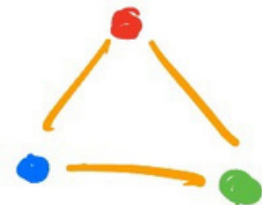
Kokeile paketoida
jalkapallo?

On vaikea asetella paperi
tasaisesti
venyttämättä/taittamatta
jalkapallon pinnalle.

Miksi vaikeaa?



Kolmio



kulmien summa on

$$3 \times 90^\circ = \underline{\underline{270^\circ}}$$



Tasossa

kulmien summa

$$= 180^\circ$$

Onko pallolla karttaa
olemassa, joka ei
venyttäisi tai muuttaisi
muotoja?

Ei

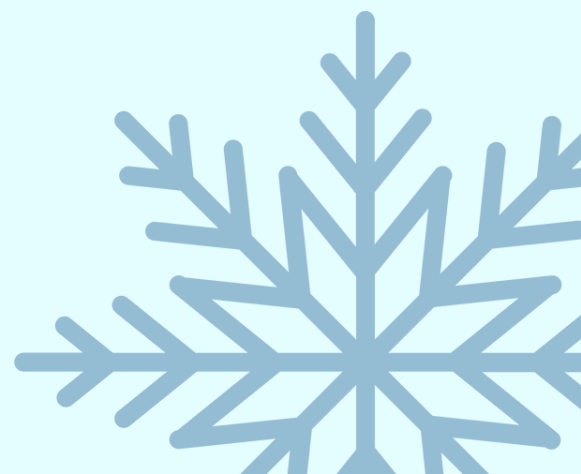
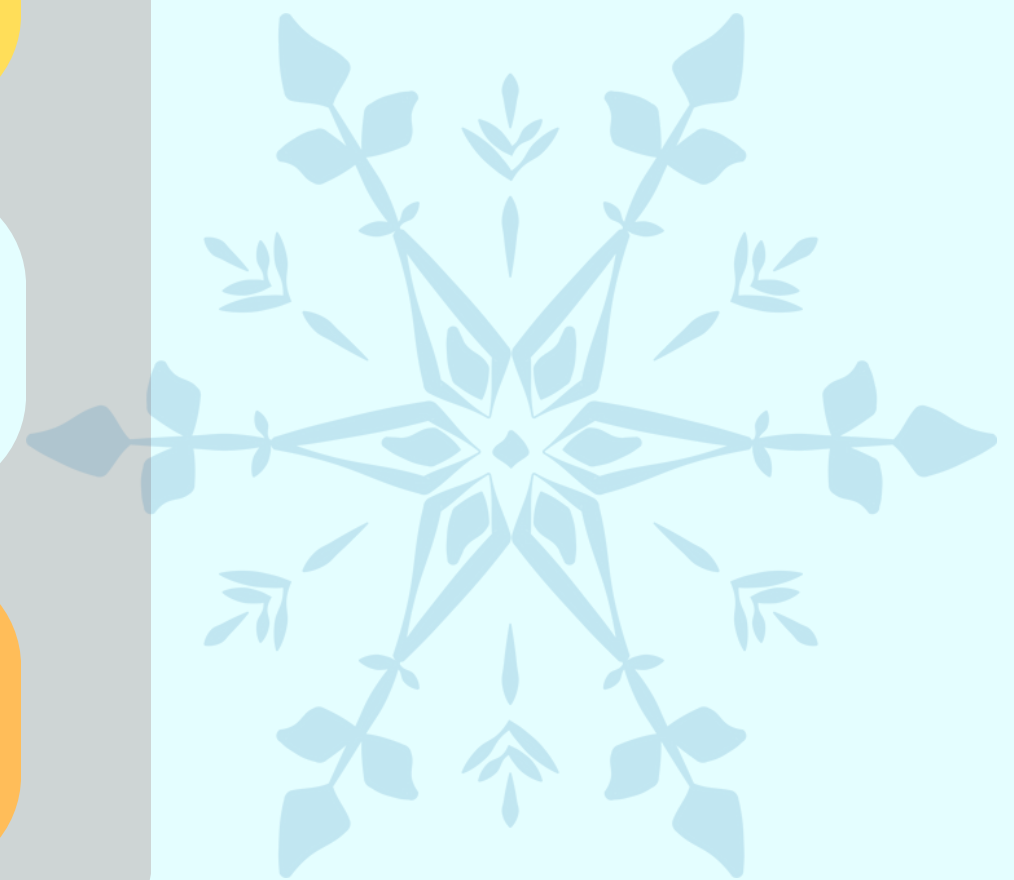
<-- Todistus

Invariantti

Invariantti on suure, joka säilyy kuvauksessa.

Isometria = pituuden säilyttävä kuvaus

Invariantteja isometrioille:
pituus, kulmat, pinta-ala, ``muoto''

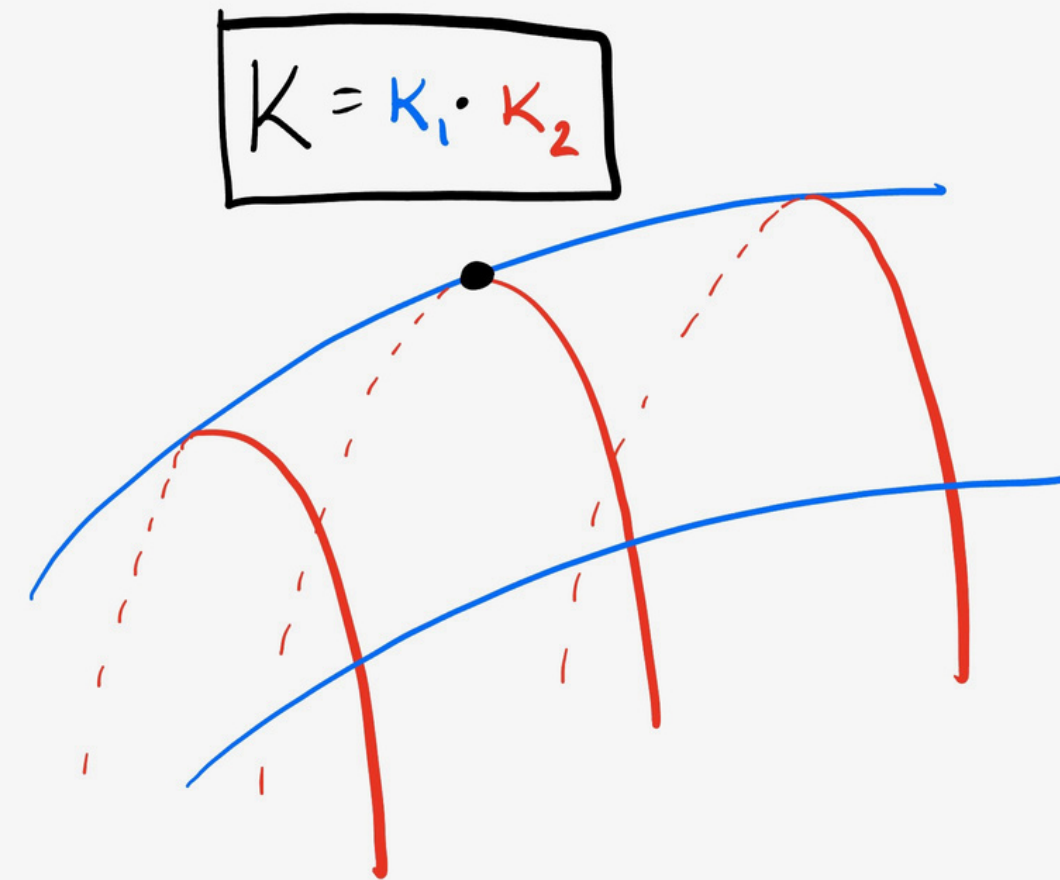
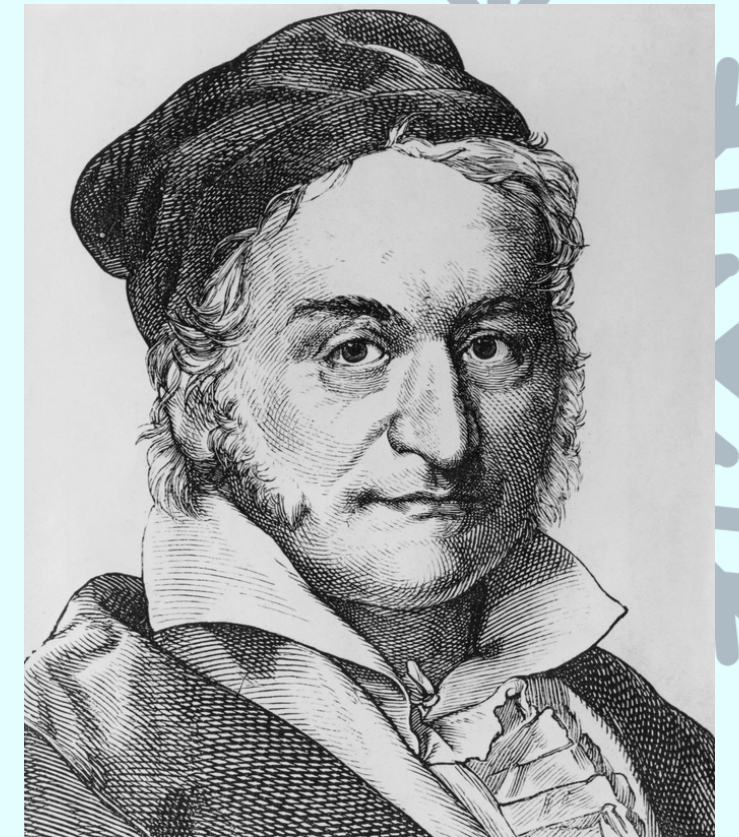


Theorema Egregium

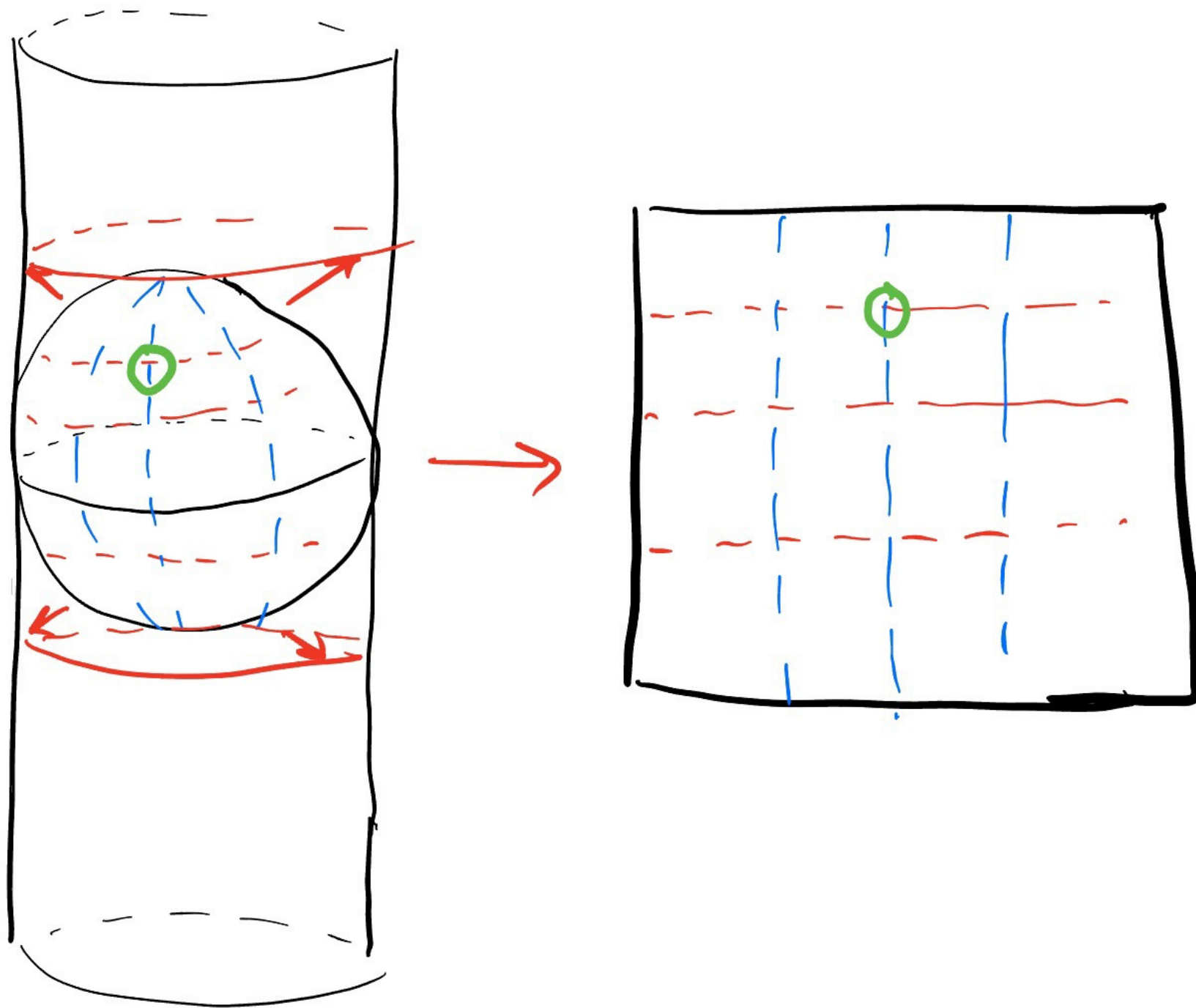
Theorema Egregium:
Isometria säilyttää kaarevuuden.

Kaarevuus = tulo kahden kohtisuoran
suunnan kääntymisnopeudesta

Pallon pinnalla on positiivinen kaarevuus
Tasolla kaarevuus = 0



Konformi kartta

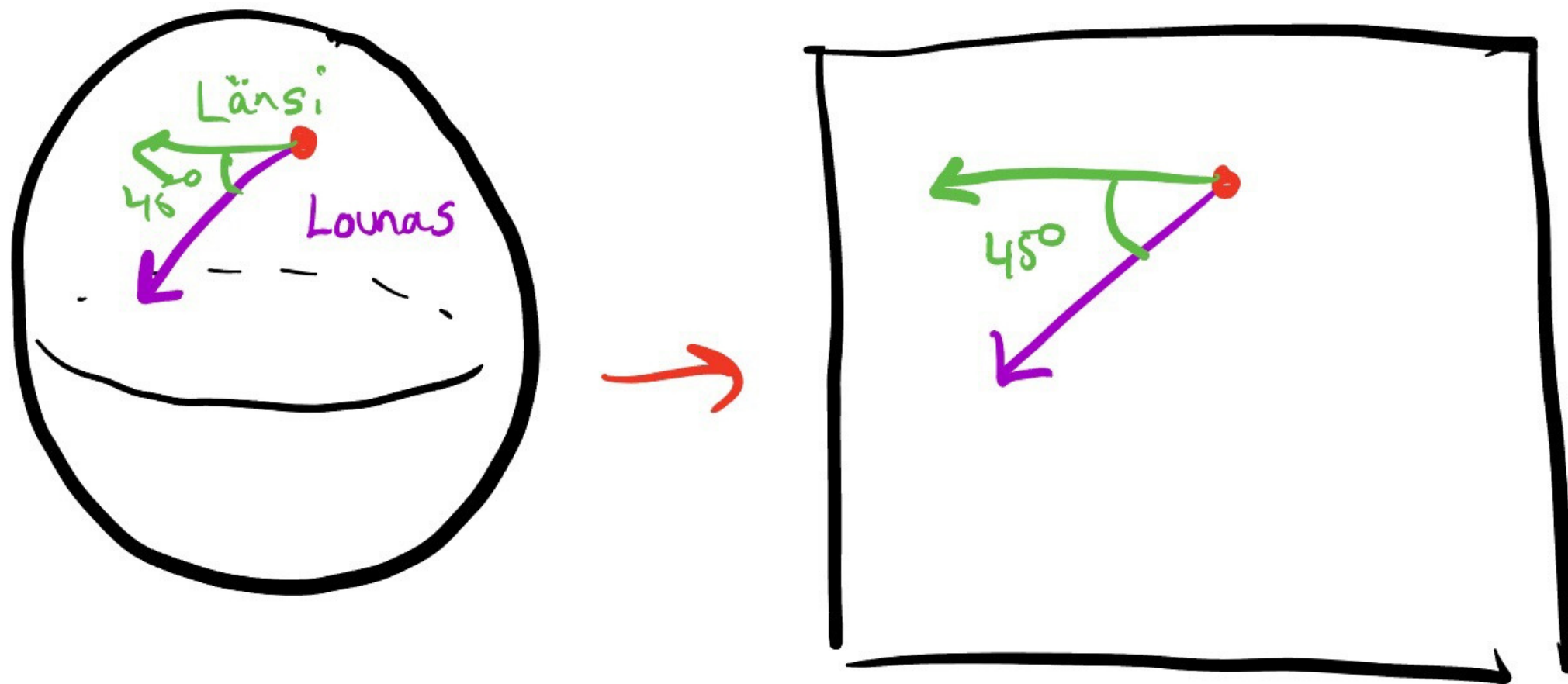


Kuitenkin, on olemassa
konformeja karttoja.

Konformi=säilyttää kulmat
ja pienet muodot

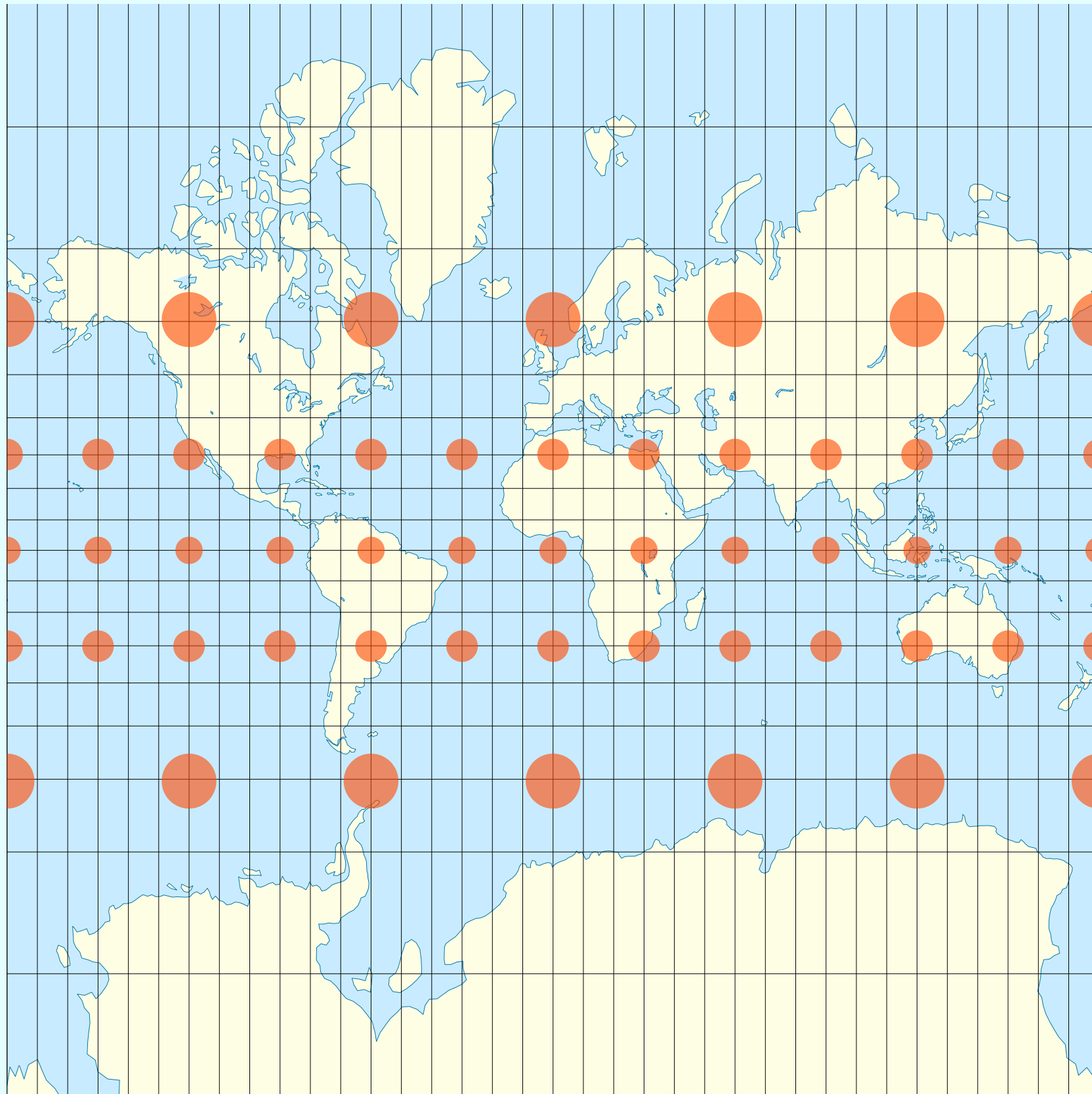
(Googlen) Mercatorin
karttaprojektio
on esimerkki tästä!

Konformi kartta



Mercatorin kartta on merenkulussa hyödyllinen, koska suorat sillä kuvaavat laivan kulkusuuntia, joissa kompassi osoittaa aina samaan suuntaan.

Pienet ja Suuret skaalat



Pienillä skaaloilla ympyrät kuvautuvat ympyröille.

Kuvassa jokainen ympyrä on yhtä suuri ympyrä pallon pinnalla.

Napojen lähellä venytetään.

Etäisyyksien muutos



Kvasisymmetria



$$d(a, b) = d(a, c)$$

$\implies$

$$d(f(a), f(b)) \leq Cd(f(a), f(c)).$$

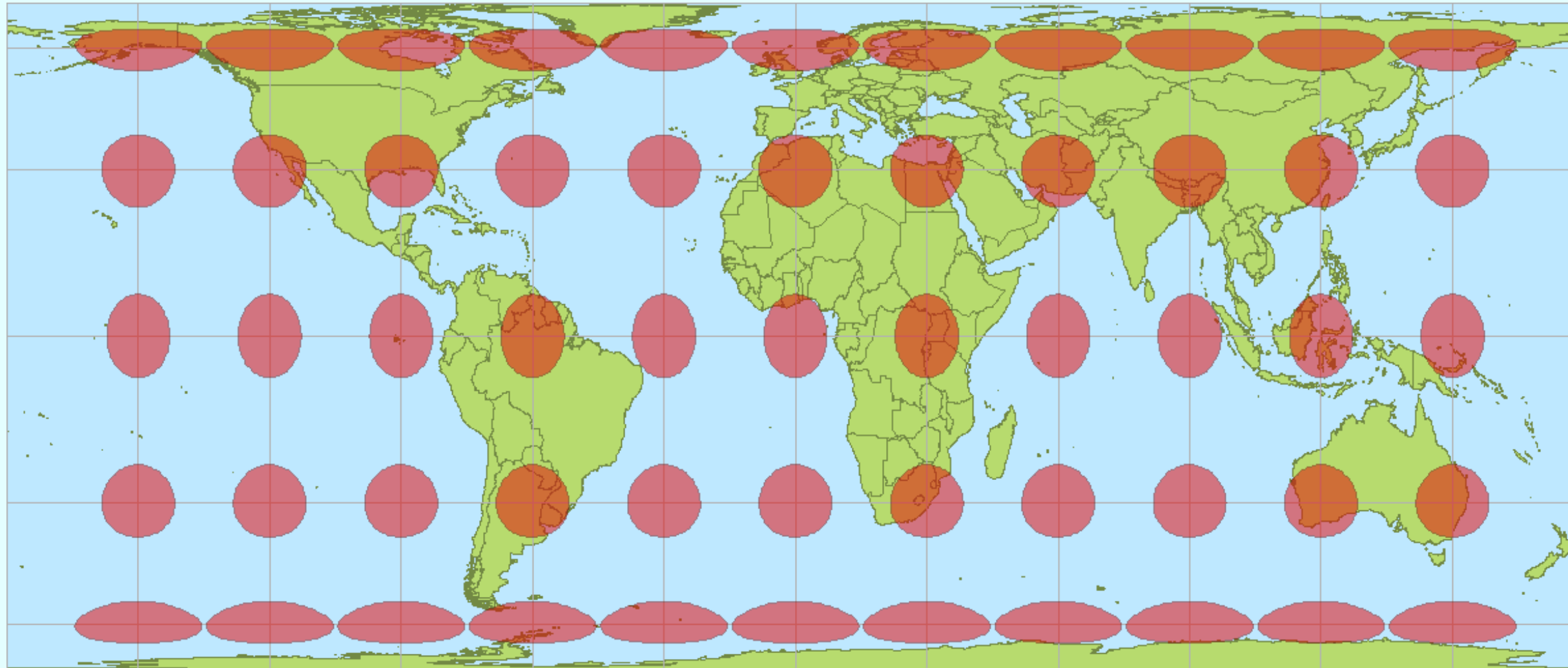
Kvasisymmetria on kuvaus joka "melkein" säilyttää muodot.

Tasasivuisen kolmion kuva on "melkein" tasa-sivuinen.

Teoreema (Heinonen-Koskela, + monet muut)

Erittäin yleisesti, konformi kuvaus on kvasisymmetria!

Kvasikonformi kartta



"Kvasimaailma" on kvasisymmetrioiden innoittamaa tutkimusta.



Kvasikonformi (melkein konformi) kartta on sellainen, joka kuvaa pienet ympyrät ellipseille.

Venytys on eri suurta eri suunnissa.

Myös kvasikonformit kuvaukset ovat kvasisymmetrioita.



Katta komeetalle

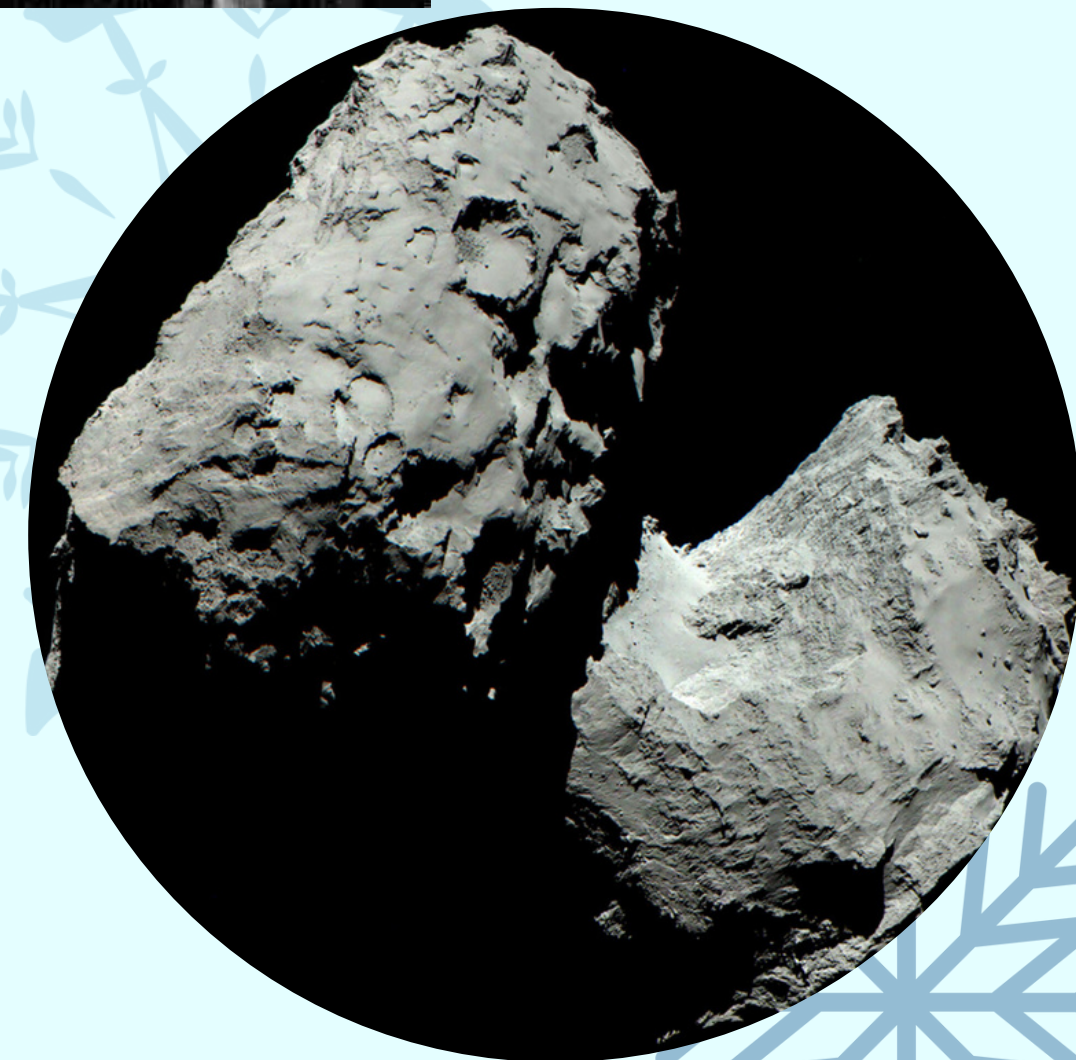
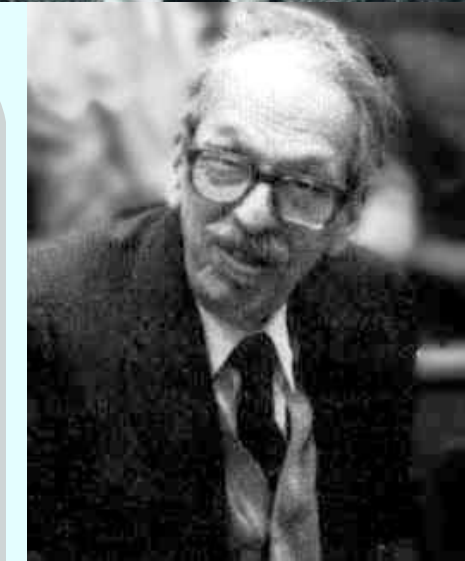
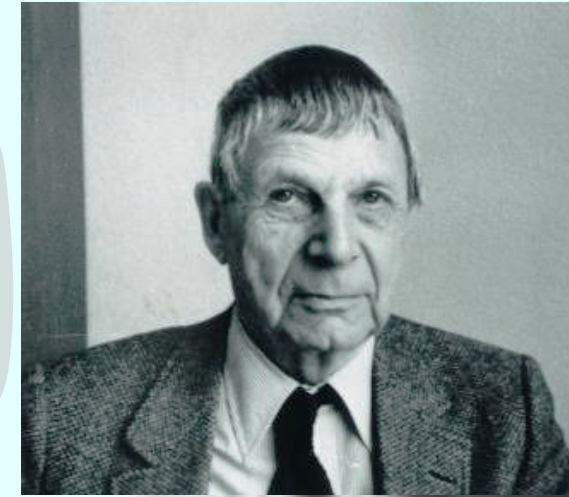
Gaussin teoreema:

Kaikilla rittävän sileillä pinnoilla on konformi kartta

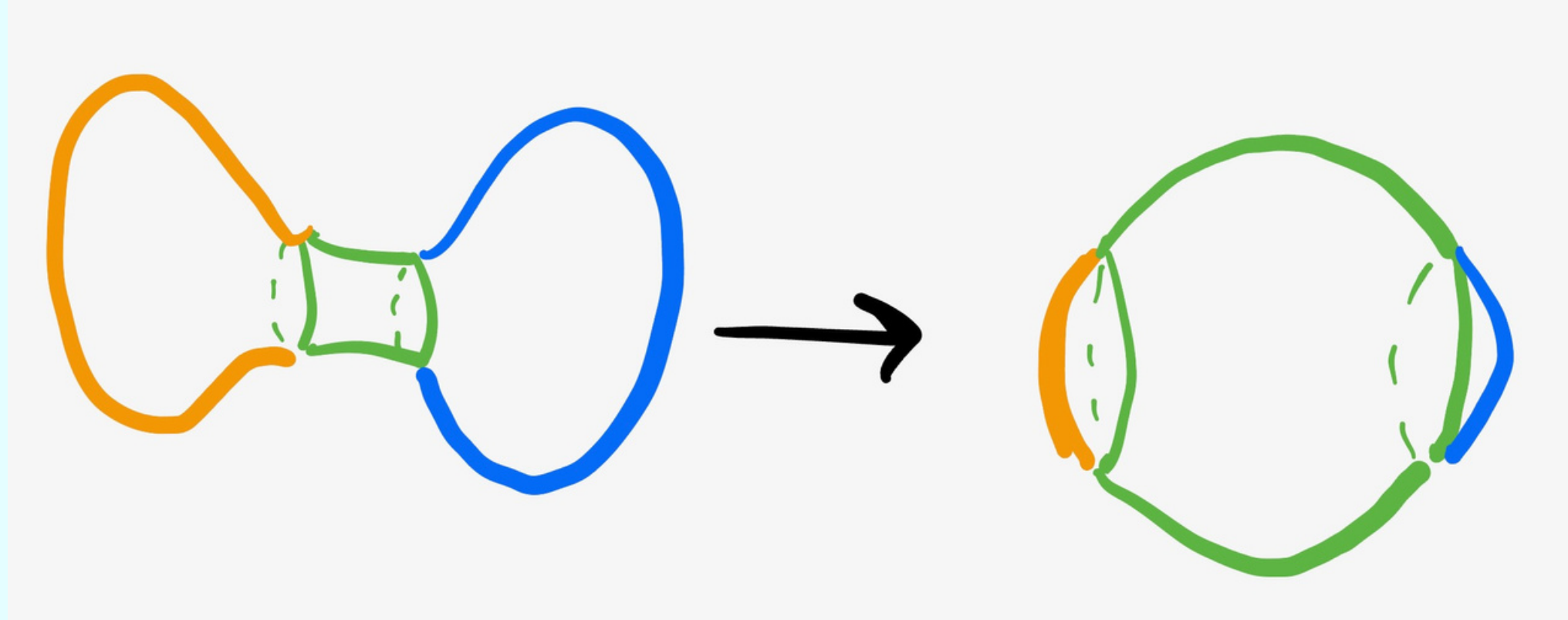
Ahlfors-Behrs (ja monet muut!) teoreema:

Myös hurjan monella epäsileällä pinnalla on konformi kartta!

Mutta kuinka yleisesti? Kuinka rosoinen pinta? Miten käyttäytyy?

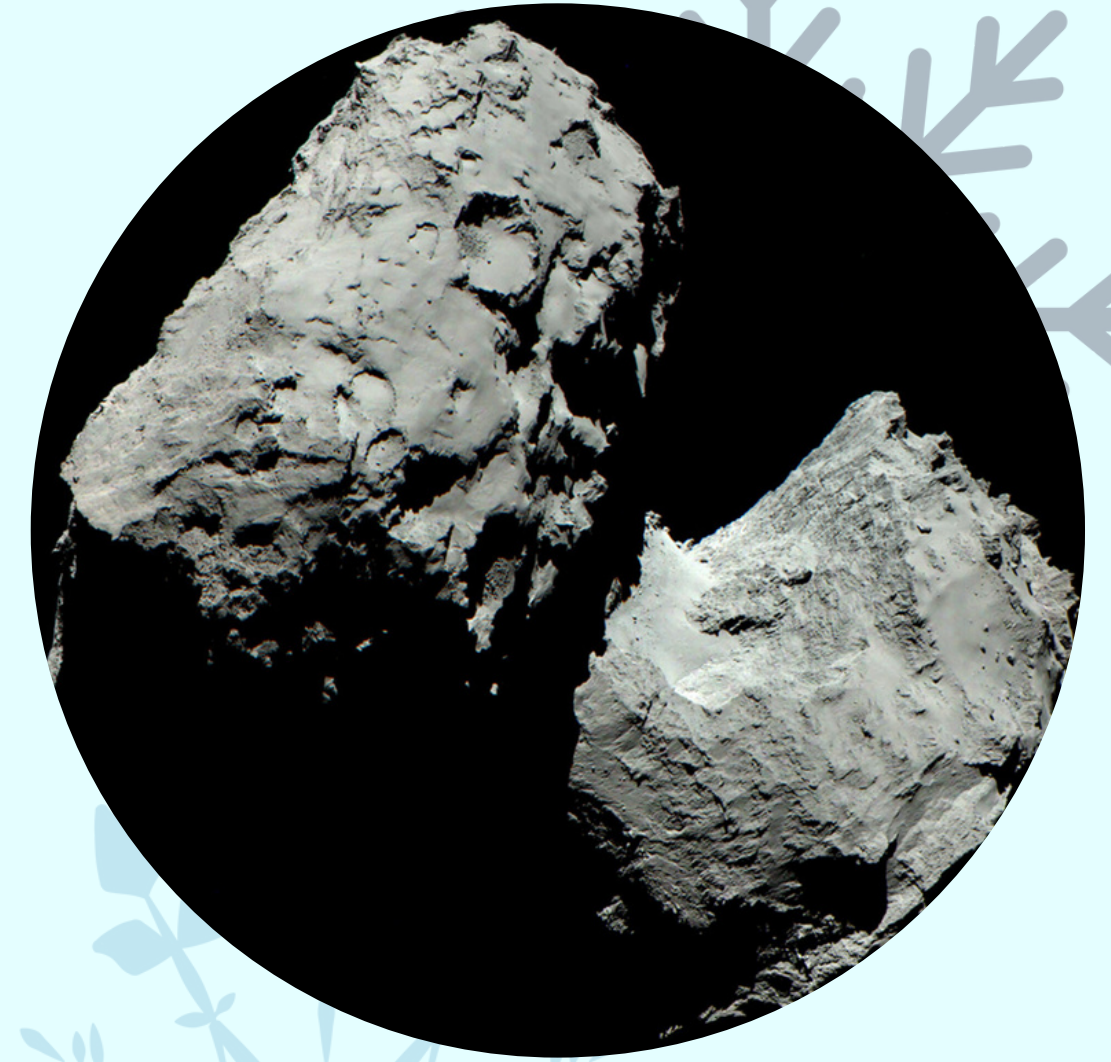


Konforminen kartta



Kuvan piirtämisessä auttoi:

- Symmetria
- Sähkömagnetismin innoittama invariantti!



Tiivistelmä



Tiede on kuin joki,

joella ei ole vain
yhtä alkua,

vaan siihen yhdistyy
monta puroa, joista
esittelin yhden.



Kuvauksia ja karttoja voi
tutkia Invarianttien
avulla.

Konformit kartat todella
yleisiä, ja suurilla skaaloilla
"melkein" symmetrisiä

Kvasimaailma aktiivisesti
tutkii sitä miten nämä
kuvaukset käyttäytyvät.